# CUERPO DE FRACCIONES DE UN DOMINIO

Empecemos recordando cómo se construía el cuerpo $K=\mathbb{Q}$ a partir del anillo $A=\mathbb{Z}$:

1) En el conjunto $A\times(A-\{0\})$ se definía la siguiente relación:

$$(a,b)\ R\ (c,d) \Leftrightarrow ad=bc$$

2) Veíamos que esta relación era de equivalencia. Por ejemplo, la propiedad transitiva se probaba así:

$$\left.\begin{matrix}(a,b)R(c,d)\\(c,d)R(e,f)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}ad=bc\\cf=de\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}fad=fbc\\bcf=bde\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow daf=dbe \Rightarrow d(af-be)=0 \Rightarrow af-be=0 \Rightarrow af=be \Rightarrow (a,b)R(e,f)$$

3) Después considerábamos el conjunto cociente $\dfrac{A\times(A-\{0\})}{R}$ y escribíamos sus elementos (las clases) en la forma $\overline{(a,b)} =: \dfrac{a}{b}$

$$\left( \text{e.g: } \underset{\overline{(2,3)}}{\frac{2}{3}} = \underset{\overline{(4,6)}}{\frac{4}{6}} = \underset{\overline{(6,9)}}{\frac{6}{9}} = \underset{\overline{(8,12)}}{\frac{8}{12}} = \underset{\overline{(10,15)}}{\frac{10}{15}} = \cdots \right)$$

A este conjunto cociente $K = \dfrac{A\times(A-\{0\})}{R}$ lo llamábamos $\mathbb{Q}$.

4) A continuación definíamos las operaciones:

$$+)\quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\cdot)\quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

y veíamos, sin dificultad, que estas operaciones dotaban a este conjunto cociente $K$ de estructura de anillo conmutativo cuyos elementos neutros eran $0 = \overline{(0,1)} = \frac{0}{1} = \frac{0}{b}$ y $1 = \overline{(1,1)} = \frac{1}{1} = \frac{b}{b}$ resp.

5) Finalmente, veámos que este anillo $K = \mathbb{Q}$ era incluso un cuerpo, pues el inverso de $\frac{a}{b} = \overline{(a,b)} \neq 0$ era $\frac{b}{a}$.

- Además $A \subset K$ mediante la inclusión $A = \mathbb{Z} \subset K = \mathbb{Q}$, $a \to \frac{a}{1}$

y, de hecho, $K = \mathbb{Q}$ es el "mínimo" cuerpo que contiene a $A = \mathbb{Z}$.
(pues si $A \subset K'$ (cuerpo), $\forall x \in K \Rightarrow x = \frac{a}{b}$, con $a, b \in A$, $b \neq 0$ $\Rightarrow x = a \cdot b^{-1} \in K'$ $\Rightarrow K \subset K'$).

— o —

Bien, ¿y qué nos impide hacer esta construcción para cualquier anillo $A$? ¿Dónde hemos utilizado que $A = \mathbb{Z}$?

Pues sólo en un sitio: Al demostrar que la relación es transitiva el paso que está en rojo, a saber:

$$\boxed{d(af - be) = 0 \Rightarrow af - be = 0}$$

Y esto es válido porque $\mathbb{Z}$ es un dominio de integridad (¡es lo único que usamos!)

## CONCLUSIÓN/TEOREMA/DEFINICIÓN:

Si $A$ es un anillo íntegro arbitrario, se define el cuerpo de cocientes de $A$ como el mínimo cuerpo $K$ que contiene a $A$.
(Sus elementos se denotan en la forma $\frac{a}{b}$, $a, b \in A \wedge b \neq 0$).

(cuerpo de cocientes o cuerpo de fracciones)

**Ejemplos:**

| dominio $A$ | | cuerpo de fracciones $K$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{Z}$ | $\hookrightarrow$ | $\mathbb{Q}$ |
| $\mathbb{Q}$ | $\hookrightarrow$ | $\mathbb{Q}$ |
| $A$ cuerpo | $\hookrightarrow$ | $K = A$ |
| $\mathbb{Z}/(6)$ | $\hookrightarrow$ | no tiene |
| $\mathbb{Q}[X]$ | $\hookrightarrow$ | $\mathbb{Q}(X) = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \,\middle|\, q \neq 0 \right\}$ (funciones racionales con coef. en $\mathbb{Q}$) |
| $\mathbb{Z}[X]$ | $\hookrightarrow$ | $\mathbb{Q}(X)$ |
| $K[X]$ | $\hookrightarrow$ | $K(X) = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \,\middle|\, p, q \in K[X],\ q \neq 0 \right\}$ (func. racion. con coef. en $K$) |
| $\{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}[i]$ | $\hookrightarrow$ | $\mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q}(i)$ |
| $\mathbb{Z}[i]$ | $\hookrightarrow$ | $\mathbb{Q}(i)$ |
| $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$ | $\hookrightarrow$ | $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}] = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ |
| $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ | $\hookrightarrow$ | $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ |

$\frac{1}{i} = -i \in \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$

$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{5} = 3 \cdot 5^{-1} \\ 3, 5 \in \mathbb{Z}[i] \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{5} \in c.c.\,\mathbb{Z}[i]$

$(\sqrt{-5} = \sqrt{5}\,i)$

Finally, we make some remarks on the extension of an embedding of a ring into a field.

*Let $R$ be an integral ring, and*

p. integro

$$f: R \to E \text{ (cuerpo)}$$

inyectiva

*an embedding of $R$ into some field $E$. Let $K$ be the quotient field of $R$. Then $f$ admits a unique extension to an embedding of $K$ into $E$, that is an embedding $f^*: K \to E$ whose restriction to $R$ is equal to $f$.*

To see the uniqueness, observe that if $f^*$ is an extension of $f$, and

$$f^*: K \to E$$

$R \subset K$

is an embedding, then for all $a, b \in R$ we must have $(K = \text{c.c.}(R))$

$$f^*(a/\underset{\neq 0}{b}) = f^*(a)/f^*(b) = f(a)/f(b),$$

so the effect of $f^*$ on $K$ is determined by the effect of $f$ on $R$. Conversely, one can *define* $f^*$ by the formula

$$f^*(a/b) = f(a)/f(\underset{\neq 0}{b}),$$

$$\left\{ f^*\left(\frac{a}{b}\right) = f^*(a \cdot b^{-1}) = f^*(a) \cdot f^*(b^{-1}) = f^*(a)\, f^*(b)^{-1} = f(a) f(b)^{-1} = \frac{f(a)}{f(b)} \right.$$

and it is seen at once that the value of $f^*$ is independent of the choice of the representation of the quotient $a/b$, that is if $a/b = c/d$ with

$$a, b, c, d \in R \qquad \text{and} \qquad bd \neq 0,$$

then

$$f(a)/f(b) = f(c)/f(d).$$

One also verifies routinely that $f^*$ so defined is a homomorphism, thereby proving the existence.

$$1 = b b^{-1} \Rightarrow 1 = f^*(1) = f^*(b)\, f^*(b^{-1})$$

$$\begin{cases} f^*(b^{-1}) = (f^*(b))^{-1} \\ (f^*(b^{-1}))^{-1} = f^*(b) \end{cases}$$

$f: \mathbb{Z} \longmapsto E$ (el único homom.)

**Observaciones:** 1) Si $K = \mathbb{Q}$ sólo hay un posible homomorfismo $f^*: \mathbb{Q} \longmapsto E$, pues

¿y siempre va a haber 1?

$$f^*\left(\frac{m}{n}\right) = f^*(m)\cdot f^*(n^{-1}) = f^*(m)\cdot f^*(n)^{-1} = f(m)\cdot f(n)^{-1} =$$

$\frac{m}{n} = m\cdot n^{-1}$

$$= (me)(ne)^{-1}; \text{ donde } e = 1_E.$$

$me = (\underbrace{e + \cdots + e}_{m})$

2) Es crucial que $f: R \longmapsto E$ sea inyectiva.

Ejemplo:

$$f: R = \mathbb{Z} \longmapsto E = \mathbb{Z}/(7)$$
$$m \longmapsto \bar{m}$$

no extiende a un homomorfismo $f^*: K = \mathbb{Q} \longmapsto E$.

Por qué, ¿cuánto valdría $f^*\left(\frac{1}{7}\right)$?

$$f^*\left(\frac{1}{7}\right) = f^*(1)\cdot f^*(7^{-1}) = f^*(1)\, f^*(7)^{-1} =$$

$$= f(1)\cdot f(7)^{-1} = \bar{1}\cdot(\bar{7})^{-1} = \bar{1}\cdot \cancel{\bar{0}^{-1}} \;?$$

(Recuérdese que un homomorfismo $\varphi: K \mapsto E$ que sale de un cuerpo es siempre inyectivo: Si $0 \neq x \in K$, $\varphi(x) \neq 0$. Razón: $1 = x\cdot x' \Rightarrow \varphi(1) = \varphi(x)\cdot\varphi(x') \Longrightarrow$
$\Rightarrow 1 = \varphi(x)\,\varphi(x') \Longrightarrow \varphi(x) \neq 0$).

3) No todo cuerpo $K$ es el cuerpo de fracciones de algún subanillo $A \subsetneq K$ (como $\mathbb{Q}$ lo es de $\mathbb{Z}$).

Ejemplo: Tomemos $K = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$.

Si $A \subset K$ es un subanillo $\Rightarrow \bar{1} \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{1} + \bar{1} = \bar{2} \in A \Rightarrow \bar{2} + \bar{1} = \bar{3} \in A \cdots \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \mathbb{F}_p$. (¡$\mathbb{F}_p$ no tiene subanillos propios!)

---

Respuesta a una pregunta

$$\frac{\mathbb{Z}[X]}{(6)} \qquad\qquad \mathbb{Z}/(6)[X]$$

$$\overline{1+5X+3X^{17}+2X^{1000}} = 1+5X+3X^{17}+2X^{1000}+(6)$$

$$\bar{1}+\bar{5}X+\bar{3}X^{17}+\bar{2}X^{1000} = (1+(6))+(5+(6))X+\cdots$$

$$1+5X+3X^{17}+(6) = 1+5X+3X^{17}+6X+(6)$$

$$(6) = 6\,\mathbb{Z}[X] = \{6(a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n) = 6a_0+6a_1X+\cdots+6a_nX^n\}$$